Universidade Federal de Lavras
Departamento de Ciências Exatas
Prof. Daniel Furtado Ferreira
6.0ª Lista de Exercícios Práticos — Conceitos Básicos de Probabilidade

1) Considere um experimento que consiste em lançar dois dados equilibrados e registrar seus resultados em relação as faces que estavam para cima após o lançamento. Admite-se que os resultados sejam perfeitos em todos os lançamentos, ou seja, não existe a possibilidade de o dado lançado cair em um posição em que uma das suas seis faces não fique evidentemente voltada para cima. Pergunta-se:

   a) Qual é o espaço amostral deste experimento?

   b) Qual é a cardinalidade deste espaço amostral?

   c) É plausível supor que os seus pontos sejam equiprováveis?

   d) O que é evento?

   e) Obter explicitamente os seguintes eventos: a) E_1: ocorreu um número menor ou igual a 2 no primeiro lançamento. b) E_2: ocorreu o número 6 no segundo lançamento. c) E_3: soma das faces dos dois lançamentos é igual a 6.

   f) Os eventos E_1, E_2 e E_3 são mutuamente excludentes ou disjuntos?

   g) Determinar os conjuntos (eventos) das intersecções E_1E_2, E_1E_3, E_2E_3 e $E_1E_2E_3$. Determinar também o conjunto (evento) correspondente à união $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

   h) em palavras o que significa os eventos E_1E_3, E_2E_3 e $E_1 \cup E_2 \cup E_3$?

2) Dado o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3\}$, cujos elementos são todos equiprováveis. Quais dos subconjuntos a seguir são considerados eventos: $A = \{1\}$, $B = \phi$, $C = \{1,4\}$, $D = \{1, 2, 3\}$?

3) Construir os espaços amostrais para os seguintes experimentos aleatórios e verificar quais são contáveis e quais são não contáveis:

   a) Registro dos sexos no nascimentos de dois animais.

   b) Lançamento de uma moeda equilibrada até que a primeira cara ocorra, ocasião que se encerra o experimento.

   c) Soma dos resultados das faces no lançamento de dois dados equilibrados.

   d) Tempo de vida de uma árvore.

   e) Lançamento de uma moeda e registro da face que ficou virada para cima.

4) Em quais casos do exercício 3 podemos aplicar o conceito de probabilidade clássica para computar probabilidades de eventos.

5) Dar exemplos de situações em que as probabilidades subjetivas podem ser utilizadas.

6) Para o espaço amostral e eventos do exercício 1, usando o conceito clássico de probabilidades como medida de probabilidade e as propriedades de probabilidade apresentas em aula, determinar as seguintes probabilidades?

a) $P(\Omega)$	*b)* $P(E_1)$	*c)* $P(E_2)$	*d)* $P(E_3)$
e) $P(E_1E_2)$	*f)* $P(E_1E_3)$	*g)* $P(E_2E_3)$	*h)* $P(E_1 \cup E_2)$
i) $P(E_1 \cup E_3)$	*j)* $P(E_2 \cup E_3)$	*k)* $P(\phi)$	*l)* $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$
m) $P(E_1^c)$	*n)* $P(E_2^c)$	*o)* $P((E_1 \cup E_2)^c)$	*p)* $P((E_1 \cup E_2 \cup E_3)^c)$

7) Os eventos $A = \{(MM),(MF),(FM)\}$ e $B = \{(FF)\}$ formam uma partição de $\Omega = \{(MM),(MF),(FM),(FF)\}$?

8) Para o espaço amostral e os eventos do exercício 1, usando o conceito clássico de probabilidades como medida de probabilidade, calcular as seguintes probabilidades:

a) $P(E_1\vert E_2)$	*b)* $P(E_2\vert E_1)$	*c)* $P(E_2\vert E_3)$	*d)* $P(E_3\vert E_1)$

   e) Use o teorema de Bayes para computar $P(E_1|E_2)$, utilizando como conhecida probabilidade $P(E_2|E_1)$ do exercício (b) anterior. O resultado é igual ao encontra no exercício (a), anterior?

   f) Com base nas probabilidades $P(E_1|E_2)$ e $P(E_1)$, podemos dizer se os eventos E_1 e E_2 sao independentes?

   g) Os eventos E_1 e E_3 são independentes? Verifique isso usando as propriedades e discorra de forma intuitiva sobre a possibilidade de independência dos dois eventos.

9) Considerando ninhadas de $n = 3$ filhotes de coelhos, construir o espaço amostral considerando os nascimentos de fêmeas e machos, utilizando um diagrama de árvore e considerar os eventos "*nascer macho*" e "*nascer fêmea*" como equiprováveis. Calcular as probabilidades dos seguintes eventos:

a) nascimento de exatamente duas fêmeas.

b) nascimento de pelo menos um macho.

c) nascimento de pelo menos duas fêmeas.

d) nascimento de no máximo uma fêmea.

10) Um exame clínico apresenta sensibilidade de 99% para detectar diabetes, ou seja, identifica a doença de um indivíduo que realmente a possui em 99% dos casos. Esse mesmo exame tem especificidade de 98%, ou seja, quando seu resultado é negativo, significa que 98% dos casos identificados realmente não apresentam a doença. O primeiro caso é o denotado por verdadeiro positivo e o segundo, por verdadeiro negativo. Assim, temos $P(+|\text{Doente}) = 0{,}99$ e $P(-|\text{Saudável}) = 0{,}98$. Temos ainda que $P(-|\text{Doente}) = 0{,}01$ e $P(+|\text{Saudável}) = 0{,}02$, que são, respectivamente, os falsos negativos e os falsos positivos. Na população brasileira, 6,5% das pessoas possuem diabetes. Pergunta-se qual é a probabilidade de que uma pessoa seja diabética realmente quando o exame der resultado positivo?

Resolução

1) Para o experimento aleatório do lançamento de dois dados equilibrados temos as seguintes respostas:

   a) o espaço amostral deste experimento é:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}$$

   b) A cardinalidade de Ω é: $|\Omega| = 36$, ou seja, é igual ao número de elementos que o conjunto possui, sendo neste caso finita.

   c) Sim, pois foi enunciado que os dados eram equilibrados.

   d) Evento é qualquer subconjunto de Ω, incluindo o conjunto vazio e o próprio Ω.

   e) O evento E_1 é:

$$E_1 = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \end{array} \right\}$$

   O evento E_2 é:

$$E_2 = \left\{ \; (1,6), \quad (2,6), \quad (3,6), \quad (4,6), \quad (5,6), \quad (6,6) \; \right\}$$

   Finalmente, o evento E_3 é:

$$E_3 = \left\{ \; (1,5), \quad (2,4), \quad (3,3), \quad (4,2), \quad (5,1) \; \right\}$$

   f) Não são mutuamente excludentes, pois $E_1E_2 \neq \phi$ e $E_1E_3 \neq \phi$. Para serem mutuamente excludentes, eles teriam que possuir interseção vazia para todos os pares possíveis, ou seja, E_1E_2, E_1E_3 e E_2E_3 deveriam ser todos conjuntos vazios ϕ.

   g) As intersecções são: $E_1E_2 = \{(1,6), (2,6)\}$, $E_1E_3 = \{(1,5), (2,4)\}$, $E_2E_3 = \phi$ e $E_1E_2E_3 = \phi$. A união é:

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,6), & (3,3), & (4,2), & (4,6), & (5,1), & (5,6), \\ (6,6) & & & & & \end{array} \right\}$$

   h) O significado de E_1E_3 é a ocorrência de um número menor ou igual a 2 no primeiro lançamento cuja soma das duas faces seja igual a 6; o significado de E_2E_3 é a ocorrência de uma face6 no primeiro lançamento cuja soma das duas faces seja igual também a 6, o que é um evento impossível de ocorrer; e o significado de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ é a ocorrência de um evento que tem ou um número 2 no primeiro lançamento, ou de um número 6 no segundo lançamento, ou cuja soma dos dois resultados seja igual a 6.

2) São eventos o conjunto A, $B = \phi$ e $D = \Omega$. O conjunto C não é um subconjunto de Ω, pois possui um elemento que não pertence ao espaço amostral, o elemento 4.

3) Temos as seguintes respostas:

   a) Registro dos sexos no nascimentos de dois animais - o espaço amostral é:

$$\Omega = \{(MM),(MF),(FM),(FF)\}\,.$$

   Como o espaço amostral é finito, então ele é contável.

   b) Lançamento de uma moeda equilibrada até que a primeira cara ocorra, ocasião que se encerra o experimento - registrando cara com C e coroa com K, temos que o espaço amostral é:

$$\Omega = \{C,KC,KKC,KKKC,KKKKC,\cdots\}\,.$$

   Neste caso a cardinalidade de Ω é infinita, ou seja, Ω possui infinitos elementos. Embora sejam infinitos, os elementos podem ser associados com o conjunto de números inteiros, o que neste caso confere a propriedade de ser contável ao espaço amostral.

c) Soma dos resultados das faces no lançamento de dois dados equilibrados: o espaço amostral neste caso, aproveitando o espaço amostral do exercício número 1 para construí-lo é:

$$\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}.$$

Como novamente este espaço amostral tem finitos elementos, então ele é contável.

d) Tempo de vida de uma árvore - o espaço amostral é dado por:

$$\Omega = [0,\infty).$$

Neste caso, o espaço amostral não é finito e além disso, não se pode fazer uma associação de seus elementos com os números inteiros, como anteriormente, sendo portanto um espaço amostral não contável.

e) Lançamento de uma moeda e registro da face que ficou virada para cima - o espaço amostral é:

$$\Omega = \{C, K\}.$$

Com infinitos elementos, o espaço amostral é contável.

4) Nos exemplos envolvendo os espaços amostrais do registro de sexo do nascimento de dois animais e do lançamento de uma moeda podemos aplicar o conceito clássico para computar probabilidades de eventos. Iso porque o espaço amostral tem cardinalidade finita e seus elementos são equiprováveis. Nos demais casos, não podemos, pois ou os espaços amostrais são contáveis infinitos ou não contáveis ou possuem elementos, quando contáveis, com probabilidades diferentes (não equiprováveis), como é o caso do espaço amostral da soma das faces dos dois dados lançados.

5) Podemos utilizar as probabilidades subjetivas para avaliar a possibilidade de chover em um dado dia ao sairmos de casa, de haver seca em um determinado ano, de nevar em um determinado ano, entre outros casos.

6) As probabilidades solicitadas, haja vista que $P(\omega) = 1/36$ para todo $\omega \in \Omega$, são:

a) $P(\Omega) = |\Omega|/|\Omega| = 1$.

b) $P(E_1) = |E_1|/|\Omega| = 12/36 = 1/3$.

c) $P(E_2) = |E_2|/|\Omega| = 6/36 = 1/6$.

d) $P(E_3) = |E_3|/|\Omega| = 5/36$.

e) $P(E_1E_2) = |E_1E_2|/|\Omega| = 2/36 = 1/18$.

f) $P(E_1E_3) = |E_1E_3|/|\Omega| = 2/36 = 1/18$.

g) $P(E_2E_3) = |E_1E_2|/|\Omega| = 0/36 = 0$.

h) $P(E_1 \cup E_2) = |E_1 \cup E_2|/|\Omega| = 16/36 = 4/9$ que também pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) =& P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} \\ =& \frac{16}{36} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

i) $P(E_1 \cup E_3) = |E_1 \cup E_3|/|\Omega| = 2/36 = 1/18$ que também pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_3) =& P(E_1) + P(E_3) - P(E_1E_3) = \frac{12}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} \\ =& \frac{15}{36} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

j) $P(E_2 \cup E_3) = |E_2 \cup E_3|/|\Omega| = 11/36$ que também pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} P(E_2 \cup E_3) =& P(E_2) + P(E_3) - P(E_2E_3) = \frac{12}{36} + \frac{5}{36} - 0 \\ =& \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

k) $P(\phi) = 0$.

l) $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = |E_1 \cup E_2 \cup E_3|/|\Omega| = 19/36$.

m) $P(E_1^c) = 1 - P(E_1) = 1 - 1/3 = 2/3$.

n) $P(E_2^c) = 1 - P(E_2) = 1 - 1/6 = 5/6$.

o) $P((E_1 \cup E_2)^c) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - 4/9 = 5/9$.

p) $P((E_1 \cup E_2 \cup E_3)^c) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - 19/36 = 17/36.$

7) Sim, A e B formam uma partição de Ω, pois são excludentes e sua união é o próprio Ω.

8) Temos os seguintes resultados:

a) $P(E_1|E_2)$ é

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2}{P(E_2)} = \frac{1/18}{1/6} = \frac{1}{3}.$$

b) $P(E_2|E_1)$ é

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2}{P(E_1)} = \frac{1/18}{1/3} = \frac{1}{6}.$$

c) $P(E_2|E_3)$ é

$$P(E_2|E_3) = \frac{P(E_2 \cap E_3}{P(E_3)} = \frac{0}{5/36} = 0.$$

d) $P(E_3|E_1)$ é

$$P(E_3|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_3}{P(E_1)} = \frac{1/18}{1/3} = \frac{1}{6}.$$

e) Usando o teorema de Bayes, considerando como conhecida $P(E_2|E_1) = 1/6$, temos:

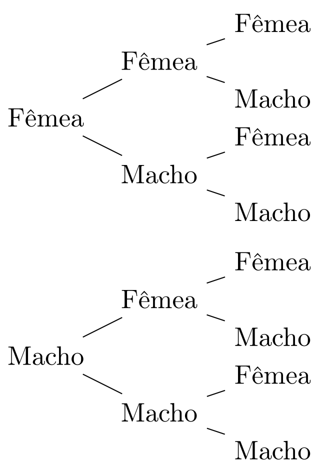
$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{(1/6) \times (1/3)}{1/6} = \frac{1}{3}.$$

Obviamente, o resultado é o mesmo obtido anteriormente, por meio do conceito de probabilidades condicionais.

f) Temos que $P(E_1|E_2) = 1/3$ e $P(E_1) = 1/3$. Como a probabilidade condicional é igual a probabilidade incondicional de E_1, então E_1 e E_2 são independentes. Podemos comprovar pela relação $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = (1/3) \times (1/6) = 1/18$, que é o mesmo resultado obtido diretamente pela definição clássica de probabilidade para $P(E_1 \cap E_2)$, comprovando a independência dos dois eventos. Assim, em palavras significa que a probabilidade ocorrer um número menor ou igual a 2 no primeiro lançamento é independente de que tenha se ocorrido o número 6 no segundo lançamento.

g) A probabilidade $P(E_1 \cap E_3)$ será igual a $P(E_1)P(E_3)$ no caso de independência dois dois eventos e diferente deste valor, em caso contrário. Vimos que $P(E_1 \cap E_3) = 1/18$. A probabilidade $P(E_1)P(E_3)$ é $(1/3) \times (5/36) = 5/108$. Como os dois resultados são diferentes, então E_1 e E_3 não são eventos independentes. Intuitivamente podemos deduzir que os eventos não são independentes, pois dado que a soma das faces dos dois dados é igual a seis, limita a ocorrência de resultados com números menores ou iguais a 2 no primeiro lançamento. Em outras palavras, intuitivamente espera-se que a probabilidade marginal de ocorrer E_1 seja diferente da probabilidade condicional de ocorrer E_1, dado que ocorreu E_2 e vice-versa.

9) O dendrograma (diagrama de árvore) é:



O espaço amostral é obtido considerando todos os ramos desse diagrama de árvore e resulta em:

$$\Omega = \{(FFF), (FFM), (FMF), (FMM), (MFF), (MFM), (MMF), (MMM)\}.$$

Cada ponto deste é equiprovável, pois as probabilidades de nascimento de fêmea e macho são iguais e cada elemento de Ω tem probabilidade $(1/2)^3 = 1/8$.

As probabilidades dos eventos de interesse são dadas a seguir, usando a medida clássica de probabilidade, considerando as cardinalidades dos eventos e do espaço amostral.

a) nascimento de exatamente duas fêmeas:

$$P(\text{nascimento de exatamente duas fêmeas}) = \frac{3}{8}.$$

b) nascimento de pelo menos um macho:

$$P(\text{nascimento de pelo menos um macho}) = \frac{7}{8}.$$

c) nascimento de pelo menos duas fêmeas:

$$P(\text{nascimento de pelo menos duas fêmeas}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

d) nascimento de no máximo uma fêmea:

$$P(\text{nascimento de no máximo uma fêmea:}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

10) A probabilidade desejada, usando o teorema de Bayes é:

$$P(\text{Doente}|+) = \frac{P(+|\text{Doente})P(\text{Doente})}{P(+)}.$$

Se usarmos o teorema da probabilidade total podemos expressar $P(+)$ por:

$$P(+) = P(+|\text{Doente})P(\text{Doente}) + P(+|\text{Saudável})P(\text{Saudável}).$$

Substituindo essa expressão na anterior, temos uma fórmula alternativa do teorema de Bayes, dada por:

$$\begin{aligned}
P(\text{Doente}|+) =& \frac{P(+|\text{Doente})P(\text{Doente})}{P(+)}\\
=& \frac{P(+|\text{Doente})P(\text{Doente})}{P(+|\text{Doente})P(\text{Doente}) + P(+|\text{Saudável})P(\text{Saudável})}\\
=& \frac{0{,}99 \times 0{,}065}{0{,}99 \times 0{,}065 + 0{,}02 \times 0{,}935} = \frac{0{,}06435}{0{,}08305}\\
=& 0{,}7748344 = 77{,}48\%.
\end{aligned}$$

Assim, se o resultado for positivo, a chance de o paciente de fato ser diabético é de 77,48%.